Exercice 1

$$\max z = 2x_1 + 6x_2$$

$$sc \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 - x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$sc \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 30 \\ x_1 \ldots x_4 \ge 0 \end{cases}$$

- Base initiale $\{x3; x4\}$
- Solution de base initiale $\{x1 = 0; x2 = 0; x3 = 40; x4 = 30\}$

Tableau initial

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ	Transformations
x_3	-1	1	1	0	40	40/1	L1=L1
x_4	1	-1	0	1	30	x	L2=L2+L1
max	2	6	0	0	0		L3=L3-6*L1

Exercice 1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ	Transformations
x_3	-1	1	1	0	40	40/1	L1=L1
x_4	1	-1	0	1	30	x	L2=L2+L1
max	2	6	0	0	0		L3=L3-6*L1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ	Transformations
x_2	-1	1	1	0	40	x	
x_4	0	0	1	1	70	x	
max	8	0	-6	0	-240		

Le PL n'est pas borné. Pas de solution optimale.

Exercice 2

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$sc \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Résolution graphique

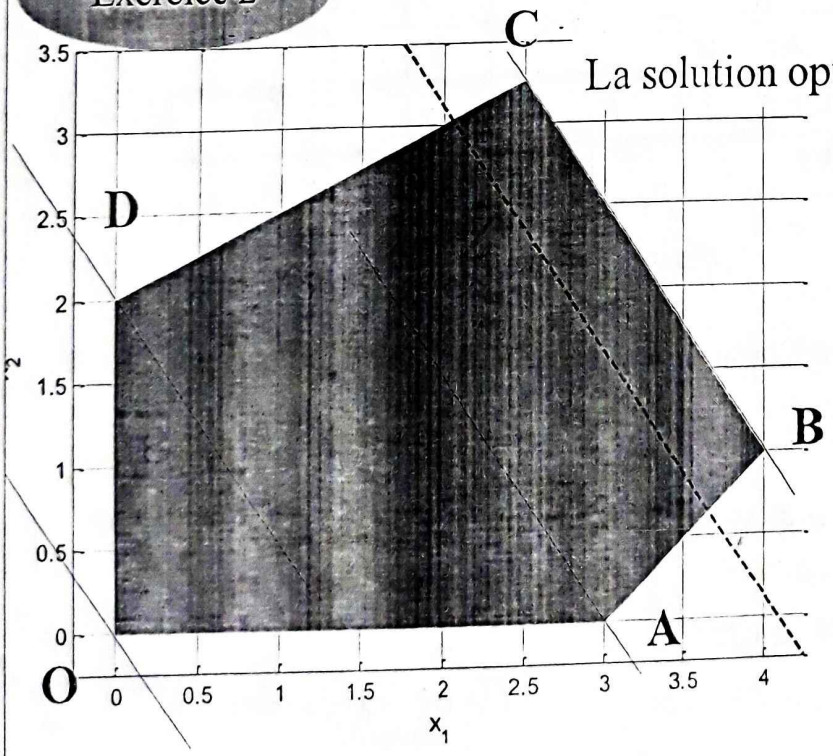
$(D_1): -x_1 + 2x_2 = 4$

$(D_2): 3x_1 + 2x_2 = 14$

$(D_3): x_1 - x_2 = 3$

$(D_z): 3x_1 + 2x_2 = 0$

Exercice 2



La solution optimale est le segment [BC]

$B(4,1)$

$C\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right)$ $\Rightarrow Z_{opt} = 14$

TD n° 1

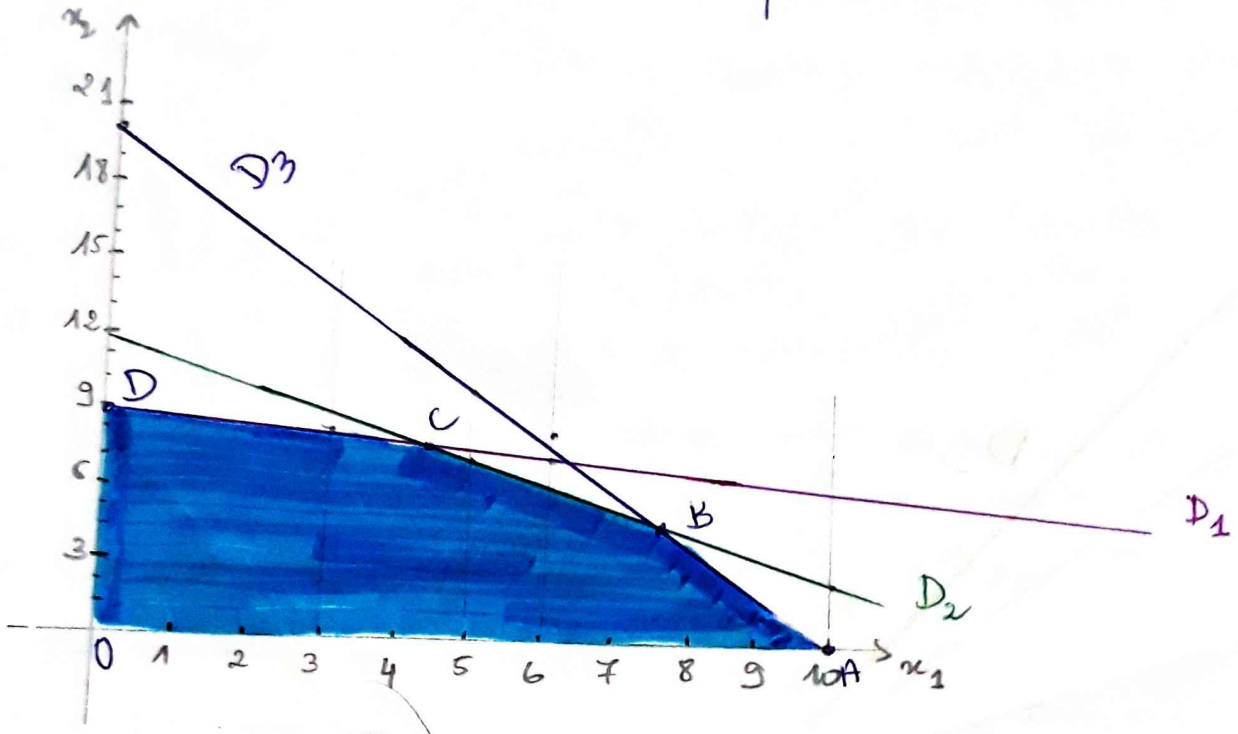
Optimisation Numérique

Exercice 1 :

① x_1 : nombre d'unité de P1
x_2 : nombre d'unité de P2

② $\max z = 60x_1 + 40x_2$

$$\text{S.c} \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$



③

$$\begin{cases} D_1 : 3x_1 + 9x_2 = 81 \\ D_2 : 4x_1 + 5x_2 = 55 \\ D_3 : 2x_1 + x_2 = 20 \end{cases}$$

D1

x_1	x_2
0	9
6	7
3	8

D2

x_1	x_2
5	7
10	3

D3

x_1	x_2
5	10
6	8
10	0
0	20

$B = D_2 \cap D_3$: $4x_1^B + 5x_2^B = 55$

$2x_1^B + x_2^B = 20 \Rightarrow x_2^B = 20 - 2x_1^B$

$4x_1^B + 100 - 10x_1^B \Rightarrow 100 = 6x_1^B$

$x_1^B = 7{,}5$, $x_2^B = 5$

$$X_{opt} \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$z_{opt} = (60 \times 7{,}5) + (5 \times 40) = 650$ dt

Exercice 2 :

x_1 : nombre des véhicules de M1

x_2 : nombre des véhicules de M2

$\max z = 66x_1 + 84x_2$

$$s/c \begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 \leq 2100 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 \\ x_1 \leq 1100 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 : 1,5x_1 + 2x_2 = 2100 \\ D_2 : x_1 + 3x_2 = 2250 \\ D_3 : 2x_1 + 2x_2 = 2600 \\ D_4 : x_1 = 1100 \end{cases}$$

D1

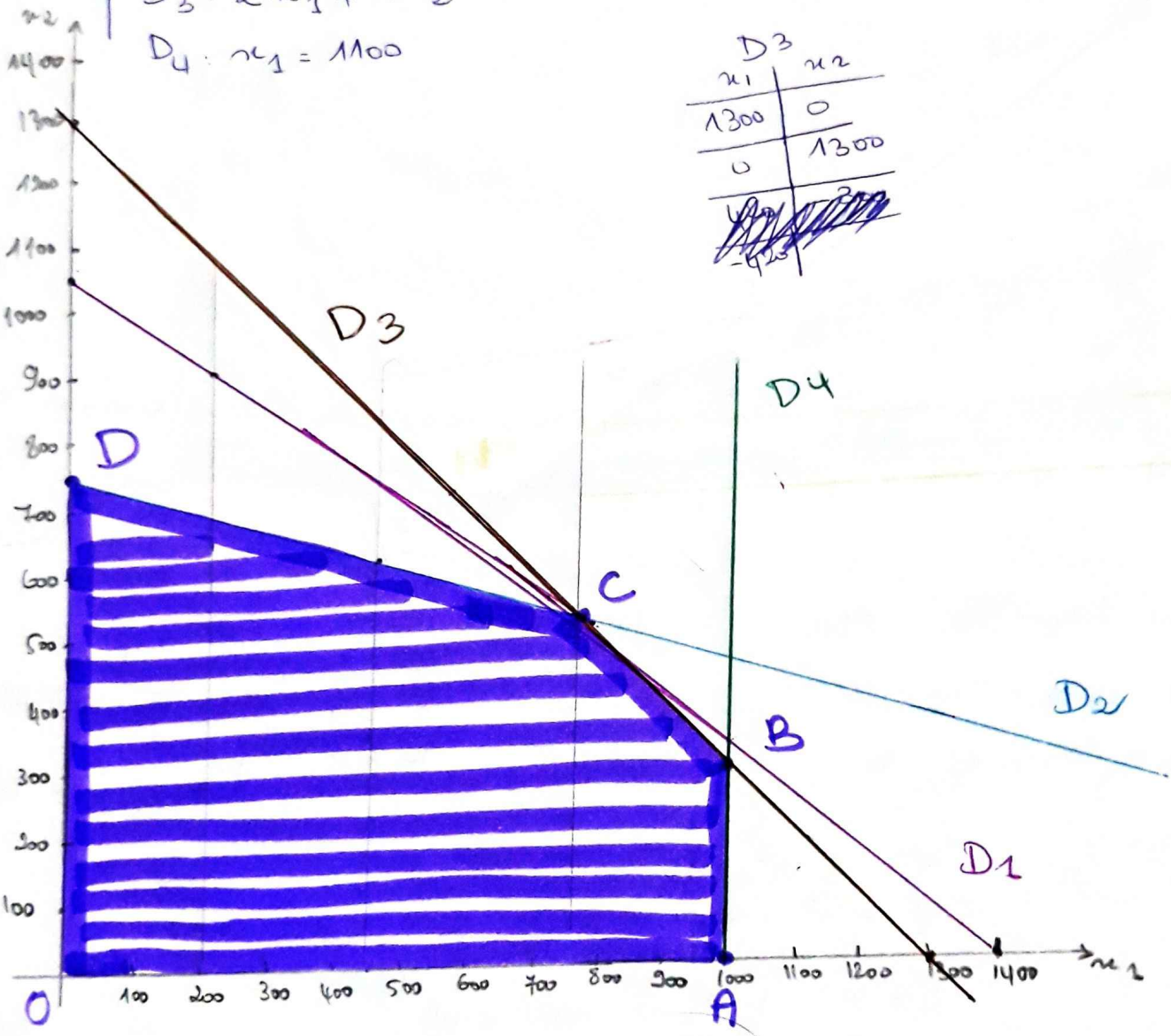
x_1	x_2
200	900
0	1050
1400	0

D2

x_1	x_2
0	750
450	600
750	500

D3

x_1	x_2
1300	0
0	1300
~~450~~	~~300~~



$C = D_1 \cap D_3$ $\quad B = D_4 \cap D_3$

$x_1 = 1300 - x_2$ (D3)

$D_1 : 1950 - 1,5x_2 + 2x_2 = 2100$

$-0,5x_2 = -150$

$\Rightarrow x_2 = 300 \longrightarrow x_1 = 1000$

B (1100, 200)

$z_B = 89400$

D3

x_1	x_2
0	0
420	-330
-420	330

$z_{opt} = 91200$ KDT $X_{opt} \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \end{pmatrix}$; C le pnt optimal $66x_1 + 84x_2 = 0$

Exercice 4 :

x_1 : nombre de TV

x_2 : nombre de machines à laver

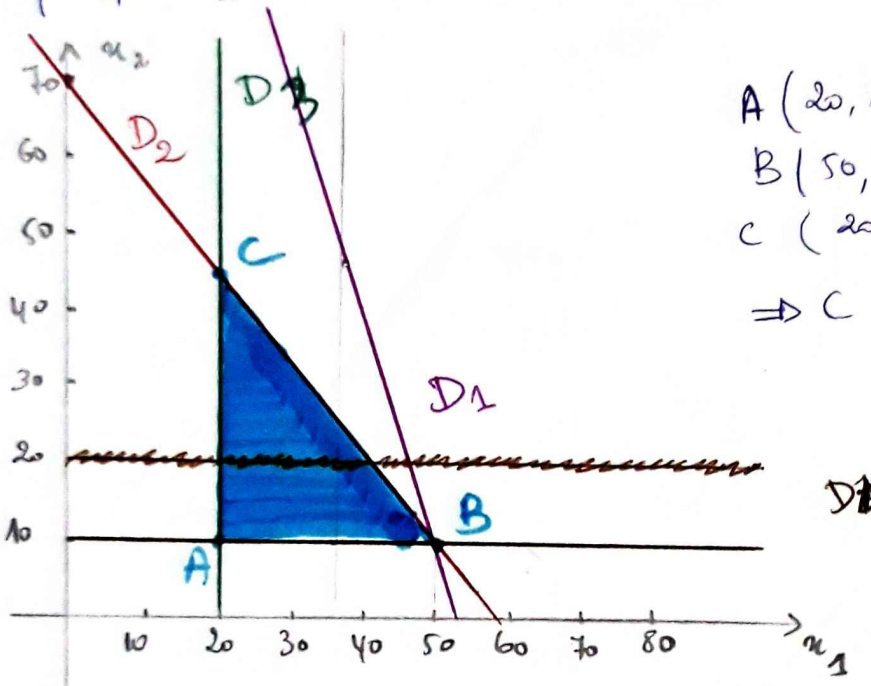
$\max z = 70x_1 + 100x_2$

$$\text{sc} \begin{cases} 120x_1 + 50x_2 \leq 6500 \\ 1,2x_1 + x_2 \leq 70 \\ x_1 \geq 20 \\ x_2 \geq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1 : 120x_1 + 50x_2 = 6500 \\ D_2 : 1,2x_1 + x_2 = 70 \\ D_3 : x_1 = 20 \\ D_4 : x_2 = 10 \end{cases}$$

D1	
x_1	x_2
50	10
35	46

D2	
x_1	x_2
0	70
50	10



$A(20, 10)$ $\quad Z_A = 2400$

$B(50, 10)$ $\quad Z_B = 4500$

$C(20, 46)$ $\quad Z_C = 6000$

$\Rightarrow$ C : le pnt optimal

$Z_{opt} = 6000$ DT

$X_{opt} \begin{pmatrix} 20 \\ 46 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

pont optimal : $C(45, 50)$

$z_{opt} = 1875$

Travaux Dirigés N°2
Recherche Opérationnelle & Optimisation

Exercice 1

On considère le programme linéaire suivant :

$$\max\ z = 2x_1 + 6x_2$$
$$sc \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 - x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer la solution optimale, si elle existe, en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

Exercice 2

Soit le programme linéaire suivant :

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$sc \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre graphiquement ce PL.
2. Résoudre ce PL en utilisant la méthode de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.
3. Comparer les résultats obtenus.

Exercice 3

Soit le programme linéaire suivant :

$$\max\ z = x_1 + 2x_2$$
$$sc \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ 3x_1 + x_2 \leq 120 \\ x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre graphiquement ce PL.
2. Résoudre ce PL en utilisant la méthode de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.
3. Comparer les résultats obtenus.

Exercice 4

Deux villes sont alimentées en électricité par deux centrales. La puissance totale fournie par la centrale 1 est $35\,Gwh$ et par la centrale 2 est $50\,Gwh$. Néanmoins, la ville 1 nécessite au moins $45\,Gwh$ pour sa consommation et la ville 2 au moins $20\,Gwh$.

Les coûts en DT d'acheminement de $1\,Gwh$ envoyé à la ville $j(j = 1, 2)$ depuis la centrale $i(i = 1, 2)$ sont résumés dans le tableau suivant :

	Ville 1	Ville 2
Centrale 1	8	6
Centrale 2	9	12

On désire déterminer le nombre de Gwh produits de chaque centrale et envoyés à chaque ville afin de minimiser le coût d'alimentation en électricité.

1. Donner les variables de décision de ce problème et préciser leurs unités.
2. Formuler un programme linéaire associé à ce problème.
3. Résoudre le programme linéaire formulé en appliquant la méthode de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

Exercice 5

Une compagnie aérienne cherche à se constituer d'une nouvelle flotte d'avions pour couvrir de nouvelles destinations. Pour les voyages de longues distances il lui faut au moins 20 avions, pour les moyennes distances 30 avions et pour les courtes distances 50 avions.

Pour satisfaire ces demandes, la compagnie envisage d'acquérir trois types d'avions : grande taille, moyenne taille et petite taille. Les prix unitaires en KDT de chaque type d'avions sont résumés dans le tableau suivant :

Taille d'avion	Grande	Moyenne	Petite
Prix d'achat	270	230	120

Les longues distances nécessitent seulement des avions de grande taille. Les moyennes distances nécessitent un nombre d'avions de moyenne taille deux fois plus le nombre d'avions de grande taille. Les courtes distances nécessitent un nombre d'avions de petite taille cinq fois plus le nombre d'avions de moyenne taille.

On désire déterminer le nombre de chaque type d'avions tout en minimisant le coût d'achat.

1. Formuler un programme linéaire associé à ce problème.
2. Résoudre le programme linéaire formulé en appliquant la méthode de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

Exercice 6

Une entreprise fabrique 3 produits à partir de 3 ressources. Le premier produit utilise 3 unités de la ressource 1, 1 unité de la ressource 2 et 1 unité de la ressource 3. Le deuxième produit utilise 1 unité des ressources 1 et 3 et produit 1 unité de la ressource 2. Enfin le troisième produit utilise 1 unité de la ressource 1, 2 unités de la ressource 2 et produit 1 unité de la ressource 3. Le premier produit rapporte 4, le troisième rapporte 2, tandis que le deuxième coûte 2 par unité produite. On dispose au départ de 180, 160 et 80 unités des ressources 1, 2 et 3 respectivement.

1. Donner les variables de décision de ce problème.
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.

3. Résoudre le programme linéaire formulé en appliquant la méthode de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

Exercice 7

Un atelier peut fabriquer trois types d'articles :

- l'article A à la cadence de 35 objets à l'heure
- l'article B à la cadence de 45 objets à l'heure
- l'article C à la cadence de 20 objets à l'heure

Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois. Le bénéfice unitaire pour l'article A est de 10 DT par objet, pour B de 6 DT, pour C de 12 DT.

Ces objets sont vendus en totalité à des grossistes. On a observé que l'on ne pouvait pas écouler par mois plus de 4900 objets de type A, ni plus de 5400 objets de type B, ni plus de 2000 objets de type C.

D'autre part, chaque objet doit être vérifié avant sa commercialisation : une équipe de trois techniciens est chargée de cette mission. Chaque technicien travaille 170 heures par mois. La vérification d'un objet du type A prend quatre minutes, du type B trois minutes et du type C deux minutes.

L'atelier veut organiser sa production de telle manière que son bénéfice soit maximum.

1. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
2. Trouver la solution optimale en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

DC Recherche Opérationnelle & Optimisation

Enseignante : M. CHETOUI
Niveau : GEA2
Durée : 1h30
A.U : 2020-2021

Documents non autorisés

Exercice

On considère le programme linéaire suivant :

$$\min \quad z = -25x_1 - 15x_2$$
$$sc \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la zone admissible sur le plan (o, x_1, x_2) et la droite de l'objectif.
2. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

Problème

Dans une société de production de briques on veut maximiser le gain par jour.

Deux types de brique sont produits : type 1 (brique 8) et type 2 (brique 12). La phase la plus longue en terme de durée dans le cycle de fabrication est celle de cuisson dans le four. Elle se décompose en deux étapes : étape de cuisson et étape de refroidissement. Les deux types de briques se cuisent dans des chariots de taille moyenne (pour le brique 8) et de taille grande (pour le

brique 12). Chaque type de chariots a une capacité de 100 briques chacun.

La durée du cycle de cuisson et 100 min pour un chariot de brique 8 et la moitié de temps pour un chariot de brique 12. Également, elle veut que les heures de cuisson de briques ne dépasse pas 8 heures par jour.

La société veut que la quantité de briques fabriquée soit minimum 200 et ne doit pas dépasser 1200 briques par jour. La quantité de brique 8 produite doit être au moins le double de la quantité de brique 12 produite.

Le gain pour une unité de brique 8 est de 1 DT et pour une unité de brique 12 est de 2 DT.

1. Donner les variables de décision de ce problème.
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
3. Tracer la zone admissible sur le plan (o, x_1, x_2) et la droite de l'objectif.
4. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.

   La société veut limiter le cuisson du briques 8 à 300 unités par jour.

5. En rajoutant cette dernière contrainte, quelle est la nouvelle solution optimale et l'objectif optimal ?
6. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

Examen Recherche Opérationnelle & Optimisation

Enseignante : M. CHETOUI
Niveau : GEA2
Durée : 2h
A.U : 2020-2021

Documents non autorisés

Exercice 1

On considère le programme linéaire suivant :

$$\min \quad z = x_1 + x_2$$
$$sc \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la zone admissible sur le plan (o, x_1, x_2) et la droite de l'objectif.
2. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.

Exercice 2

On considère le programme linéaire suivant :

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$sc \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la zone admissible sur le plan (o, x_1, x_2) et la droite de l'objectif.
2. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.

3. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

Exercice 3

choix des variables de décision

x1 : carb 1 stat 1
x2 : carb 1 stat 2
x3 : carb 2 stat 1
x4 : carb 2 stat 2

PL

maxz = 5*x1+25*x2+10*x3 +50*x4
sc: | x1 + x2 <= 80
| x3+x4 <= 70
| x1+x3>=50
| x2+x4>=20
| x3 <= 2*x1
|x4 <=2*x2
|x1 , ..., x4 >=0

Une société pétrolière veut distribuer 2 types de carburants vers 2 stations en utilisant 2 camions (camion i pour distribuer le carburant de type i (i=1,2)). Le premier camion a une capacité de 80KL et le deuxième une capacité de 70KL. La première station nécessite au moins 50 KL/semaine et un parcours de 100KM/semaine et la deuxième station nécessite au moins 20KL/semaine et un parcours de 250KM/semaine. Chaque station nécessite une quantité de carburant de type 2 double par rapport à la quantité de carburant de type 1 distribuée par chaque camion.

Les coûts en DT de distribution dépendent essentiellement de la distance parcourue. Ils sont résumés dans le tableau suivant :
La société veut maximiser son gain/semaine.

Coût/KL	Station 1	Station 2
Carburant 1	5	25
Carburant 2	10	50

1. Donner les variables de décision de ce problème (préciser les unités des variables).
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
3. Représenter le programme formulé sous la forme standard puis sous la forme canonique.
4. Résoudre le programme linéaire en utilisant l'algorithme de simplexe.

TD2. Optimisation

Exercice 4

$x_{ij} \begin{cases} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{cases}$ quantité de Gwh

envoyée depuis la centrale i vers la ville j

$x_{ij} \geq 0$

$\min z = 8x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4$

$$Sc \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1 + x_3 \geq 45 \\ x_2 + x_4 \geq 20 \\ x_1 \dots x_4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_3 + x_4 \leq 50 \\ -x_1 - x_3 \leq -45 \\ -x_2 - x_4 \leq -20 \\ x_1 \dots x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{phase I simplexe}$$

Phase I simplexe

$\min z = x_0$

$$Sc \begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 - x_0 = 35 \\ x_3 + x_4 + x_6 - x_0 = 50 \\ -x_1 - x_3 + x_7 - x_0 = -45 \\ -x_2 - x_4 + x_8 - x_0 = -20 \\ x_0, x_1 \dots x_8 \geq 0 \end{cases}$$

$P_{xy} = E\begin{pmatrix} y(t) & y(t-2) \\ y(t-2) & y(t) \end{pmatrix}$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_0	b	Transformations
x_5	1	1	0	0	1	0	0	0	-1	35	$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
x_6	0	0	1	1	0	1	0	0	-1	50	$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
x_7	-1	0	-1	0	0	0	1	0	-1	-45	$L_3 \leftarrow (-1)L_3$
x_8	0	-1	0	-1	0	0	0	1	-1	-20	$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$
$\min z$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$L_5 \leftarrow L_5 + L_3$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_0	b	CQ	
x_5	2	1	1	0	1	0	-1	0	0	80	40	$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4$
x_6	1	0	2	1	0	1	-1	0	0	95	95	$L_2 \leftarrow L_2 - L_4$
x_0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	45	45	$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$
x_8	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	0	25	25	$L_0 \leftarrow L_4$
min z	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	-45	-	$L_5 \leftarrow L_5 + L_4$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_0	b	CQ	Transformation
x_5	0	3	-1	2	1	0	1	-2	0	30	10	$L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1$
x_6	0	1	1	2	0	1	0	-1	0	70	70	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1$
x_0	0	1	0	1	0	0	0	-1	1	20	20	$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_1$
x_1	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	0	25	X	$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3} L_1$
min z	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	-20	-	$L_5 \leftarrow L_5 + \frac{1}{3} L_1$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_0	b	CQ	Transformation
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	10	X	$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
x_6	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	60	45	$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$
x_0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	10	30	$L_3 \leftarrow 3L_3$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	35	52,5	$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$
min z	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-10	-	$L_5 \leftarrow L_5 + L_3$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_0	b	CQ	Transformations
x_2	0	1	1	1	0	0	0	-1	1	20		
x_6	0	0	0	0	1	1	1	1	-4	20		
x_3	0	0	1	1	-1	0	-1	-1	3	30		
x_1	1	0	0	-1	1	0	0	1	-2	15		
min z	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		

Fin de phase I : $B = \{x_2, x_6, x_3, x_1\}$ $\times \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
x_2	0	1	0	1	0	0	0	-1	20
x_6	0	0	0	0	1	1	1	1	20
x_3	0	0	1	1	-1	0	-1	-1	30
x_1	1	0	0	-1	1	0	0	1	15
min z_j	8	6	9	12	0	0	0	0	0

↳ eq de minimization z original

min	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
									$L_5 \leftarrow L_5 - 8L_4$
min	0	6	9	20	-8	0	0	-8	$L_6 \leftarrow L_6 - 6L_1$
									=120
min	0	0	9	14	-8	0	0	-2	$L_5 \leftarrow L_5 - 9L_3$
									=240
min	0	0	0	5	1	0	9	9	=510

↑ -3opt

$z_{opt} = 510$ $X_{opt} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sc} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, \dots x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$O(0,0)$, $X\{0,0,4,14,3\}$, $B = \{x_3, x_4, x_5\}$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CR	Transformations
x_3	-1	2	1	0	0	4	X	$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
x_4	3	2	0	1	0	14	$\frac{14}{3}$	$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$
x_5	1	-1	0	0	1	3	3	$L_3 \leftarrow L_3$
max	3	2	0	0	0	0		$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ	Transformations
x_3	0	1	1	0	1	7	7	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5} L_2$
x_4	0	5	0	1	-3	5	1	$L_2 \leftarrow L_2 \times \frac{1}{5}$
x_1	1	-1	0	0	1	3	X	$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5} L_2$
max	0	5	0	0	-3	-9		$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ	Transformations
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	6	$\frac{15}{4}$	
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	X	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	4	10	
max	0	0	0	-1	0	-14		

$Z_{opt} = 14$ $X_{opt} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ point B

$Z = -14 + \underbrace{0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3}_{\in \text{ au Base}} \rightarrow 1 \cdot x_4 + \underbrace{0 \cdot x_5}_{\notin \text{ au base}}$

$\Rightarrow$ il y a une autre pnt optimal

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_5	0	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{15}{4}$
x_2	0	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{4}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$
max	0	0	0	-1	0	-14

$Z_{opt} = 14$ $X_{opt} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix} \rightarrow$ point C



1x3

$z = x_1 + 2x_2$

R
$x_1 + x_2 + x_3 = 60$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 100$
$3x_1 + x_2 + x_5 = 120$
$x_2 + x_6 = 45$
$x_1, x_2, x_3 \dots x_6 \geq 0$

B $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ	Transformation
x_3	1	1	1	0	0	0	60	60	$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$
x_4	1	2	0	1	0	0	100	50	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4$
x_5	3	1	0	0	1	0	120	120	$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$
x_6	0	1	0	0	0	1	45	45	$L_4 \leftarrow L_4$
max z	1	2	0	0	0	0			$L_5 \leftarrow L_5 - 2L_4$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ	Transformations
x_3	1	0	1	0	0	-1	15	15	$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
x_4	1	0	0	1	0	-2	10	10	$L_2 \leftarrow L_2$
x_5	3	0	0	0	1	-1	75	$\frac{75}{3} = 25$	$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$
x_2	0	1	0	0	0	1	45	X	$L_4 \leftarrow L_4$
max z	1	0	0	0	0	-2	-90		$L_5 \leftarrow L_5 - L_2$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ	Transformations
x_3	0	0	1	-1	0	-1	5	x	$L_1 \leftarrow L_1$
x_1	1	0	0	1	0	-2	40	x	$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$
x_5	0	0	0	-3	1	5	45	$\frac{45}{5}$	$L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_5 \leftarrow L_1$
x_2	0	1	0	0	0	1	45	45	$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$
max z	0	0	0	-1	0	0	-100		$L_5 \leftarrow L_5$

S_1 : p_{int}^{opt} (10, 45) $\quad z = 100$

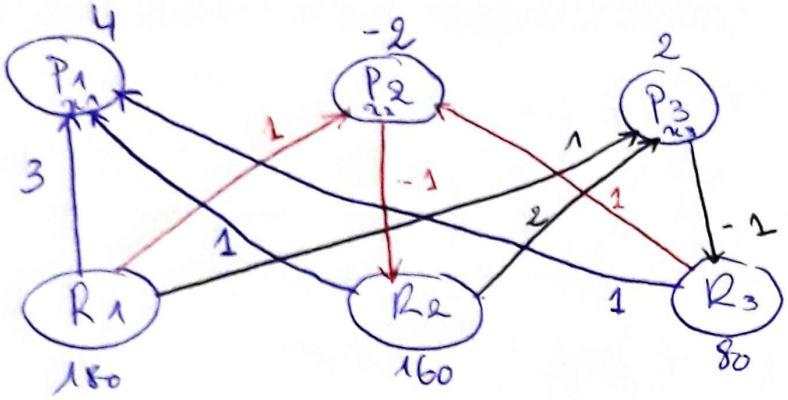
il ya une 2ème pnt

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ	Transformations
x_3	0	0	1	-1	0	1	5		
x_1	1	0	2	$-\frac{1}{5}$	0	0	20		
x_6	0	0	5	2	1	2	30		
x_2	0	1	-4	1	0	0	40		
max z	0	0	0	-1	0	0	-100		

optimal

Point opt : S_2 (20, 40) $\quad z = 100$

Exercice 6 :



$\max Z = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3$

$$\text{SC} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 180 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 160 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 80 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 180 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 160 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 80 \\ x_1 \dots x_6 \geq 0 \end{cases}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	c	Transf.
x_4	3	1	1	1	0	0	180	60	$L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1$
x_5	1	-1	2	0	1	0	160	160	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{L_1}{3}$
x_6	1	1	-1	0	0	1	80	80	$L_3 \leftarrow L_3 - L_1/3$
$\max Z$	4	-2	2	0	0	0	0		$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{4}{3} L_1$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	c	Transf
x_1	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	0	0	60	180	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5} L_2$
x_5	0	$-4/3$	$5/3$	$-1/3$	1	0	100	60	$L_2 \leftarrow L_2 \times \frac{3}{5}$
x_6	0	$2/3$	$-4/3$	$-1/3$	0	1	20	X	$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{4}{5} L_2$
$\max Z$	0	$-10/3$	$2/3$	$-4/3$	0	0	-240		$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{5} L_2$

$S = (60, 0, 0)$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CR	Transf.
x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	40		
x_3	0	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	60		
x_6	0	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$4/5$	1	100		
max Z	0	$-\frac{42}{15}$	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	-280		

$S = (40, 0, 60)$ $\quad Z_{opt} = 280$